ANALES

DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

Calle San Martín N.° 352 - Casilla 487 - Teléf. 88841 - Santiago - Chile

Año LVII (1) Marzo de 1944 N.° 3

(1) Año LVII desde la fecha de su primera publicación en 1888 como «Anales del Instituto de Ingenieros». Año XLIV desde la fecha de su primera publicación, Enero de 1901, como «Anales del Instituto de Ingenieros de Chile».

Ing. Alberto Claro Velasco

Método aproximado para determinar el desplazamiento horizontal y el período propio de vibración de estructuras de edificios

1) Introducción.—En un trabajo publicado en los «Anales» de enero 1944 hemos propuesto calcular el período propio de las estructuras de edificios hasta de 40 metros de altura (altura máxima prescrita por la Ordenanza) por la fórmula.

1) $$T = 0{,}2\sqrt{\delta}$$

En ella δ es el desplazamienio total en cm. que sufre la estructura al estar solicitada por fuerzas horizontales actuando al nivel de cada piso e iguales en magnitud al peso del piso más el peso de los semi-pilares adyacentes al piso considerado.

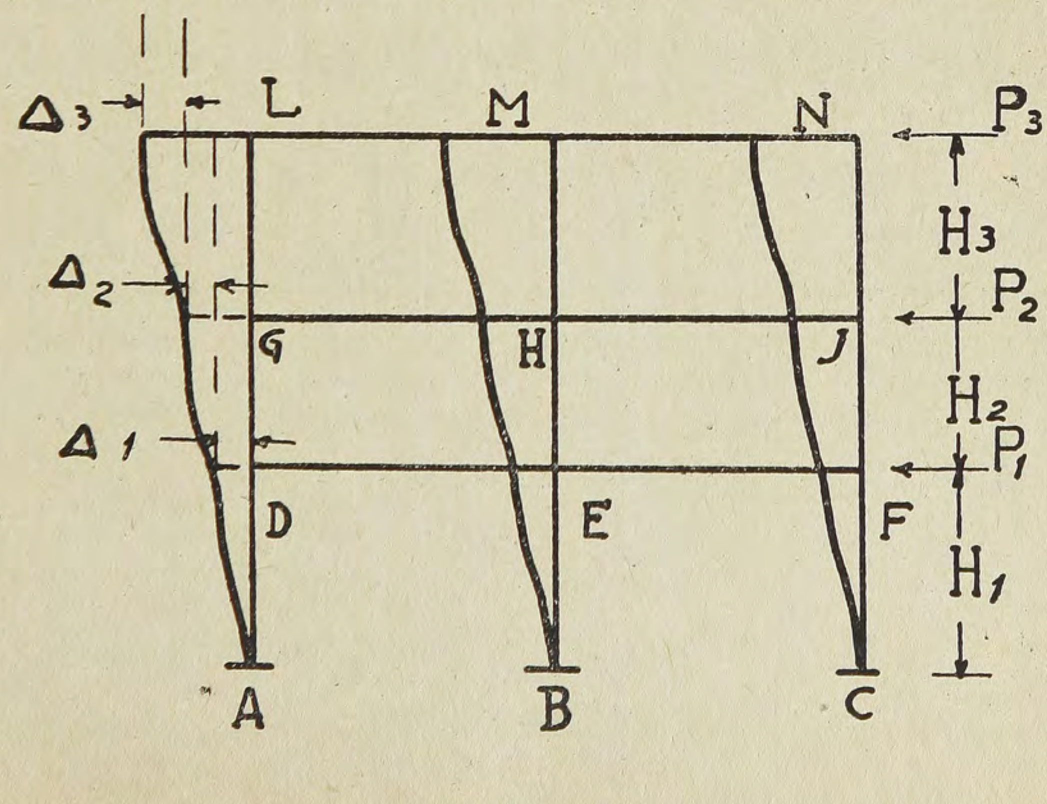

Fig 1

Queremos ahora dar a conocer un método aproximado que permite obtener fácilmente el desplazamiento δ y cuya aplicación es especialmente recomendable en estructuras regulares.

2) Consideremos el pórtico doble de tres pisos de la figura 1 y supongamos que todos los nudos del primer piso de la estructura sufran una misma rotación θ_1 los del segundo piso una misma rotación θ_2 y los del tercer piso θ_3.

Con esta aproximación, las ecuaciones del método Slope Deflection permiten expresar el momento M_1 total en el primer piso, igual a la suma de los momentos en los extremos inferior y superior de los pilares del piso, por la fórmula 2).

$$2)\qquad M_1 = F_1 . H_1 = (3\theta_1)\ 2\Sigma k_{p1} - (2R_1)\ 2\Sigma k_{p1}$$

siendo:

$$F_1 = P_1 + P_2 + P_3$$

$\Sigma k_{p1} = k_{AD} + k_{BE} + k_{CF}$, la suma de los valores $k = \frac{EI}{L}$ de todos los pilares del primer piso.

$$R_1 = \frac{3\Delta_1}{H_1}$$

Análogamente el momento M_2 en el segundo piso será:

$$3)\quad M_2 = F_2 . H_2 = (3\theta_1)\ 2\Sigma k_{p2} + (3\theta_2)\ 2\Sigma k_{p2} - (2R_2)\ \Sigma k_{p2}$$

Σk_{p2} : suma de los valores k de los pilares del segundo piso.

$$R_2 = 3\frac{\Delta_2}{H_2}\qquad F_2 = P_2 + P_3$$

Si consideramos que la suma de los momentos en los extremos de todos los elementos (pilares y dinteles) que concurren a los nudos del primer piso es nula, podemos poner:

$$4)\qquad \Sigma M_D + \Sigma M_E + \Sigma M_F = 0$$

siendo:

$$\Sigma M_D = M_{DG} + M_{DE} + M_{DA}$$

$$\Sigma M_E = M_{EH} + M_{EF} + M_{EB} + M_{ED}$$

$$\Sigma M_F = M_{FJ} + M_{FC} + M_{FE}$$

Introduciendo en 4) los valores de los momentos en función de los ángulos θ_1 y θ_2 de giro y de los valores R_1 y R_2 obtenemos:

$$5)\quad (2\theta_1)\,.\,2\,.\,(k_D + k_E + k_F) + (2\theta_1)\,.\,2\,\Sigma\, k_{d1} + 2\theta_2\,\Sigma\, k_{p2} - (2R_1)\,\Sigma\, k_{p1} - (2R_2)\,\Sigma\, k_{p2} = 0$$

siendo:

$$k_D = k_{DG} + k_{DE} + k_{DA}$$

$$k_E = k_{ED} + k_{EH} + k_{EF} + k_{EB}$$

$$k_F = k_{FJ} + k_{FC} + k_{FE}$$

$$\Sigma\, k_{d1} = k_{DE} + k_{EF}$$

Haciendo: 6) $\Sigma\, k_1 = k_D + k_E + k_F = 2\,k_{p2} + \Sigma\, k_{p1} + 2\,\Sigma\, k_{d1}$

resulta: 7) $2\theta_1\,\Sigma\, k_1 + 2\theta_1\,\Sigma k_{d1} + \theta_2\,\Sigma\, k_{p2} - R_1\,\Sigma\, k_{p1} - R_2\,\Sigma\, k_{p2} = 0$

Si en las ecuaciones (2) (3) y (7) hacemos $\theta_1 = \theta_2 = \theta'_1$ obtenemos tres ecuaciones entre las incógnitas $\theta'_1 - R_1 - R_2$ que nos permiten obtener el valor de R_1 en función de los momentos M_1 y M_2.

Las ecuaciones 3) y 7) se transforman en:

$$8)\quad M_2 = (3\theta'_1)\,.\,4\,\Sigma\, kp_2 - (2R_2)\,2\,k_{p2}$$

$$9)\quad \theta'_1\,.\,\Sigma\,(\Sigma\, k) - R_1\,\Sigma\, k_{p2} - R_2\,\Sigma\, k_{p2} = 0$$

siendo: $\Sigma\,(\Sigma\, k) = 2\,\Sigma\, k_1 + 2\,\Sigma\, k_{d1} + \Sigma\, k_{p2}$

Sumando las ecuaciones 2) y 8) resulta:

$$10)\quad M_1 + M_2 = (3\,\theta'_1)\,(2\,\Sigma\, k_{p1} + 4\,\Sigma\, k_{p2}) - 4R_1\,\Sigma\, k_{p1} - 4\,R_2\,\Sigma\, k_{p2}$$

Eliminando de las ecuaciones 9) y 10) los términos con R_1 y R_2 se obtiene:

$$11)\quad \theta'_1 = -\,\frac{M_1 + M_2}{2\,\Sigma\, k_{p1} + 24\,\Sigma\, k_{d1}}$$

y este valor introducido en 2) nos da:

$$12)\quad -R_1 = \frac{M_1}{4\,\Sigma\, k_{p1}} + \frac{M_1 + M_2}{\frac{4}{3}\,\Sigma\, k_{p1} + 16\,\Sigma\, k_{d1}}$$

Se obtendrá R_2 procediendo en la misma forma para el segundo piso. En este caso tenemos las ecuaciones:

$$13) \qquad M_2 = (3\theta'_2) \cdot 4 \Sigma k_{p2} - (4 R_2) \Sigma k_{p2}$$

$$14) \qquad M_3 = (3\theta'_2) \cdot 4 \Sigma k_{p3} - (4 R_3) \Sigma k_{p3}$$

y de la condición:

$$\Sigma M_G + \Sigma M_H + \Sigma M_J = 0$$

resulta

$$15) \qquad (3\theta'_2)\, 2 \Sigma k_2 - (2 R_2) \Sigma k_{p2} - (2 R_3) \Sigma k_{p3} = 0$$

Sumando las ecuaciones 13) y 14) se obtiene:

$$16) \quad M_2 + M_3 = 12\theta'_2 (\Sigma k_{p2} + \Sigma k_{p3}) - (4 R_2) \Sigma k_{p2} - (4 R_3) \Sigma k_{p3}$$

Eliminando R_2 y R_3 de las ecuaciones 15) y 16):

$$17) \qquad \theta'_2 = - \frac{M_2 + M_3}{24 \Sigma k_{d2}}$$

Este valor introducido en 13) nos da:

$$18) \qquad -R_2 = \frac{M_2}{4 \Sigma k_{p2}} + \frac{M_2 + M_3}{8 \Sigma k_{d2}}$$

Esta fórmula es válida para cualquier piso que no sea el primero. El valor $R_3 = \frac{3 \Delta_3}{H_3}$ correspondiente al tercer piso de la estructura (fig. 1) será:

$$19) \qquad -R_3 = \frac{M_3}{4 \Sigma k_{p3}} + \frac{M_3}{8 \Sigma k_{d3}}$$

El desplazamiento buscado es:

$$\delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

$$\delta = \frac{H_1}{3} \cdot R_1 + \frac{H_2}{3} R_2 + \frac{H_3}{3} R_3$$

Como los valores R han sido expresados por las relaciones 12) y 18) en una forma general, son válidos también para una estructura de n pisos.

En tal caso, se tendrá para el primer piso la misma relación:

$$12) - R_1 = \frac{M_1}{4\,\Sigma\,k_{p1}} + \frac{M_1 + M_2}{\frac{4}{3}\,\Sigma\,k_{p1} + 16\,\Sigma\,k_{d1}}$$

y para los demás pisos:

$$20) \qquad - R_x = \frac{M_x}{4\,\Sigma\,k_{px}} + \frac{M_x + M_{x+1}}{8\,\Sigma\,k_{dx}}$$

En estas fórmulas $\Sigma\,k_{p1}$ es la suma de las rigideces $K = E\frac{I}{L}$ de los pilares del primer piso; $\Sigma\,k_{d1}$ la suma de las rigideces de los dinteles del primer piso; $\Sigma\,k_{px}$ y $\Sigma\,k_{dx}$ los valores correspondientes para el piso número n.

Para deducirlas se ha supuesto que la rotación de todos los nudos de un piso es la misma e igual también a la rotación de los nudos en los pisos vecinos; o sea:

$$21) \qquad \theta_x = \theta_{x-1} = \theta_{x+1}$$

(Para el primer piso: $\theta_1 = \theta_2$)

Esta suposición es la base del procedimiento Maney Goldberg que resuelve por aproximaciones sucesivas las ecuaciones del método Slope Deflection para obtener los momentos en los extremos de las barras de una estructura de muchos pisos; y es razonable aceptarla en estructuras regulares, como lo recomienda el mismo autor.

Si aplicamos las relaciones 12) y 20) a una estructura de n pisos de altura H con la misma carga P por piso, el desplazamiento total δ de la estructura queda dado por:

$$22) \ \delta = \frac{PH^2}{12}\left(\frac{n}{\Sigma\,k_{p1}} + \frac{n-1}{\Sigma\,k_{p2}} + \frac{n-2}{\Sigma\,k_{p3}} + \frac{n-3}{\Sigma\,k_{p4}} + \ldots\ldots\right)$$

$$+ \frac{PH^2}{24}\left[\frac{(n-1)+(n-2)}{\Sigma\,k_{d2}} + \frac{(n-2)+(n-3)}{\Sigma\,k_{d3}} + \ldots\ldots + \frac{3}{\Sigma\,k_{d(n-1)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Sigma\,k_{dn}}\right] + \frac{PH^2}{3}\left[\frac{n+(n+1)}{4/3\,.\,\Sigma\,k_{p1} + 16\,\Sigma\,k_{d1}}\right]$$

Si los pilares y los dinteles tienen las mismas rigideces K_p y K_d en cada piso, siendo Z el número de columnas la fórmula 22) se reduce a:

$$23) \quad \delta = \frac{PH^2}{3\,k_p}\left[\frac{n\,(n+1)}{8\,z} + \frac{(n-1)^2}{8\,\varkappa\,(z-1)} + \frac{2\,n-1}{4/3\,z + 16\,\varkappa\,(z-1}\right]$$

$$\varkappa = \frac{k_d}{k_p}$$

3) Ejemplos de aplicación.

Ejemplo 1.

Consideremos el pórtico triple de 5 pisos de la figura 2) sometido a la acción de fuerzas P iguales en cada piso, y con las mismas rigideces de los pilares y dinteles en cada piso ($\varkappa = 1$).

$$L = H ; \quad n = 5 ; \quad z = 4$$

En la figura se ha indicado los momentos en los extremos de los pilares obtenidos por el método de Cross.

Aplicando la fórmula (23) obtenemos el desplazamiento δ de la estructura.

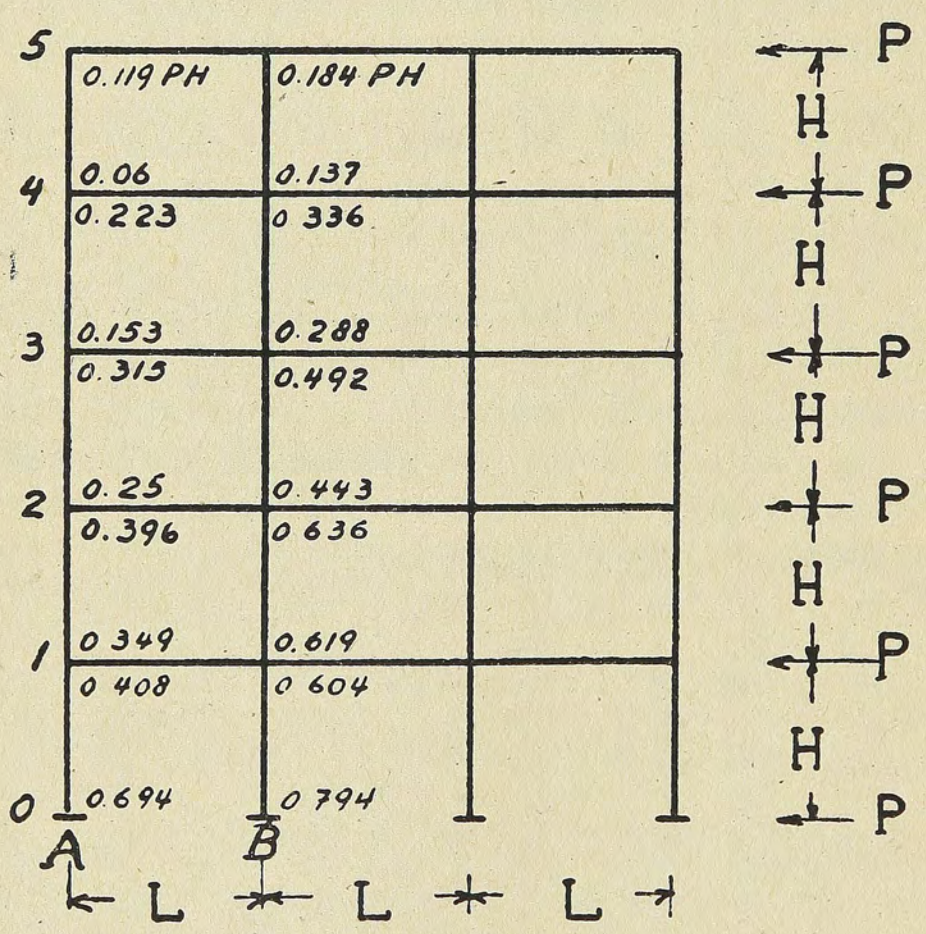

Fig. 2

$$\delta = \frac{PH^3}{3EI_p}\left[\frac{5 \times 6}{8 \times 4} + \frac{16}{8 \times 3} + \frac{9}{\frac{4}{3} \times 4 + 16 \times 3}\right]$$

$$\delta = \frac{P H^3}{\alpha E I_p} \qquad \alpha = 1.692$$

Comparemos el resultado obtenido con el que da la fórmula exacta, en función de los momentos en los extremos de los pilares. (Ver Período de Estructuras de Edificios en «Anales» Enero 1944).

$$\delta = H \left\{ \frac{M_{10}(3n-2)-M_{01}(3n-1)}{6k_{01}} + \frac{M_{21}(3n-5)-M_{12}(3n-4)}{6k_{12}} + \frac{M_{32}(3n-8)-M_{23}(3n-7)}{6k_{23}} + \frac{M_{43}(3n-11)-M_{34}(3n-10)}{6k_{34}} + \frac{M_{54}(3n-14)-M_{45}(3n-13)}{6k_{45}} \right.$$

Aplicada esta fórmula a la columna A, tenemos:

$$\delta_o = \frac{P H^3}{6 E I_p} \left(0.408 \times 13 - 0,694 \times 14 + 0,396 \times 10 - 0,349 \times 11 + 0,315 \times 7 - 0,25 \times 8 + 0,223 \times 4 - 0,153 \times 5 + 0.119 \times 1 - 0,06 \times 2 \right)$$

$$\delta_o = \frac{P H^3}{6 E I_p} \times (12,48 - 16,44) = - \frac{P H^3}{1,515 E I_p}$$

$$\alpha_o = 1,515$$

Aplicada la misma fórmula a la columna B:

$$\delta_o = \frac{P H^3}{6 E I_p} (19,18 - 23,17) = - \frac{P H^3}{1,504 E I_p}$$

$$\alpha_o = 1,504$$

La diferencia en los valores α_o se explica porque los cálculos han sido hechos a regla de cálculo.

Si tomamos para α_o el promedio 1,51 como valor exacto, el error en la determinación del período (T) por el método aproximado, referido al valor exacto (T_o) es:

$$\frac{T - T_o}{T_o} = \sqrt{\frac{1,51}{1,692}} - 1 = 0,055 \ (5,5\%)$$

Ejemplo 2.

Consideremos el pórtico triple de 4 pisos de altura H, de la figura 3).

Los números entre paréntesis indican las rigideces, y están indicados además los valores de los momentos en los extremos de los pilares deducidos por el método de Cross.

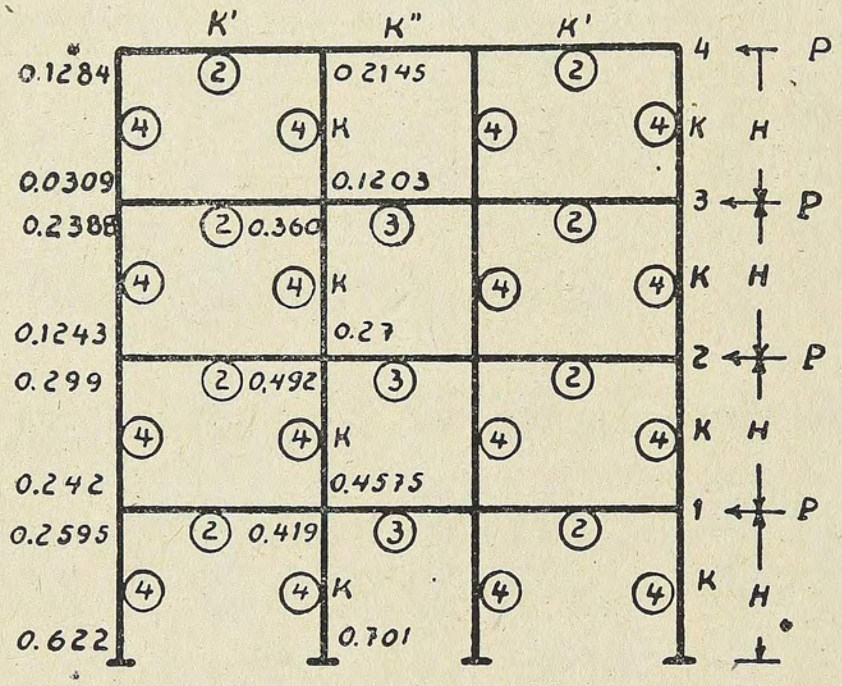

Fig. 3

Aplicando la fórmula 22) con: $\Sigma k_{p1} = \Sigma k_{p2} = \quad = 4\,k$

$\Sigma k_{d2} = \Sigma k_{d3} = \quad = 2\,k' + k''$

$$\delta = \frac{PH^2 \times 10}{12 \times 4\,k} + \frac{PH^2}{24} \times \frac{9}{(2\,k' + k'')} + \frac{PH^2}{3} \times \frac{7}{\frac{4}{3}\,4\,k + 16\,(2\,k' + k'')}$$

$$= \frac{PH^2}{k}\,(0.2083 + 0{,}2143 + 0{,}07) = \frac{PH^3}{EI_p} \times 0.4926$$

$$\alpha = \frac{1}{0.4926} = 2{,}028$$

Aplicando la fórmula exacta a la columna A resulta:

$$\delta_o = \frac{PH^2}{6\,k}\Big(0{,}2595 \times 10 - 0{,}622 \times 11 + 0{,}299 \times 7 - 0{,}242 \times 8 + 0{,}2388 \times 4$$
$$- 0{,}1243 \times 5 + 0{,}1284 \times 1 - 0{,}0309 \times 2)$$

$$= \frac{PH^3}{6EI_p} \times (5{,}77 - 9{,}47) = -\frac{PH^3}{1{,}62\,EI_p}$$

$$\alpha_o = 1.62$$

Aplicada la misma fórmula a la columna B:

$$\delta_o = \frac{PH^2}{6k}\Big(0{,}4185 \times 10 - 0{,}701 \times 11 + 0{,}492 \times 7 - 0{,}4575 \times 8 + 0{,}36 \times 4$$
$$- 0{,}27 \times 5 + 0{,}2145 \times 1 - 0{,}1203 \times 2\Big)$$

$$\delta_o = \frac{PH^3}{6EI_p} \times (9{,}29 - 12{,}97) = -\frac{PH^3}{1{,}63\,EI_p}$$

$$\alpha_o = 1{,}63$$

En este caso, el error en la determinación del período T por el método aproximado referido al valor exacto es.

$$\frac{T - T_o}{L_o} = \sqrt{\frac{1{,}63}{2{,}028}} - 1 = -0{,}104\ (10{,}4\%)$$

Conviene observar que la relación $\varkappa$, rigidez dintel a rigidez pilar, en este ejemplo menor que 3/4:

4) Discusión del procedimiento.

Aunque la suposición ($\theta_x = \theta_{x-1} = \theta_{x+1}$) base del método propuesto no se verifique en ninguna estructura, hemos visto que en la estructura de cinco pisos del ejemplo 1) con $\varkappa = 1$, da un error del orden de 5,5% y en la estructura del ejemplo (1) de 4 pisos con $\varkappa = 0{,}5$ y 0,75, el error alcanza al 10,4%.

Para las mismas estructuras calculadas con la condición límite $\varkappa = \infty$ se obtendría $\alpha = 3{,}20$ y 4,8, respectivamente y el error en la determinación del período alcanzaría a 31,4% y 41,6%. Si consideramos que el cálculo con la suposición $\varkappa = \infty$ da resultados aproximados para estructuras con $\varkappa > 2$, se comprende fácilmente que el método que proponemos dará resultados prácticamente exactos para estructuras de este tipo.

Veamos los resultados del método para estructuras, cuyas fórmulas del período se conocen en función de $\varkappa$.

Aplicada la fórmula 12) al *pórtico simple* se obtiene, naturalmente, la fórmula exacta.

En el caso del *pórtico doble de tres pisos* de la misma altura H con iguales rigideces K_p y K_d por piso dá la fórmula 23):

$$\delta = \frac{PH^3}{3EI} \cdot \left[\frac{12}{8 \times 3} + \frac{4}{8\varkappa \times 2} + \frac{5}{4/3 \,.\, 3 + 16\varkappa \times 2}\right]$$

y transformando

$$\delta = \frac{PH^2}{12EI} \times \frac{1+15\varkappa+16\varkappa^2}{\varkappa+8\varkappa^2} = \frac{PH^3}{\alpha EI}$$

Los resultados que da esta fórmula, comparados con los de la fórmula exacta (δ_o) se indican para algunos valores de $\varkappa$.

$$\delta_o = \frac{PH^3}{6EI} \times \frac{0{,}45 + 0.97\varkappa + 7{,}81\varkappa^2 + 28{,}23\varkappa^3 + 41{,}3\varkappa^4 + 28{,}25\varkappa^5 + 8{,}66\varkappa^6 + \varkappa^7}{0{,}02\varkappa + 0{,}52\varkappa^2 + 6.25\varkappa^3 + 18{,}7\varkappa^4 + 18{,}95\varkappa^5 + 7{,}5\varkappa^6 + \varkappa^7}$$

$$\delta_o = \frac{PH^3}{\alpha^o EI}$$

$\varkappa = \infty$	5	2	1	1/2
$\alpha = 6$	5.16	4.29	3.38	2,40
$\alpha_o = 6$	4.84	3.742	2,72	1,703
$\frac{T - T_o}{T_o} = 0$	—3,3%	—6,5%	—10,3%	—15,8%

En el caso de la *torre de 4 pisos* de la misma altura H con iguales rigideces K_p y K_d en cada piso la fórmula 23) da:

$$\delta = \frac{PH^3}{3EI}\left(\frac{20}{8 \times 2} + \frac{9}{8\varkappa \times 1} + \frac{7}{4/3 \times 2 + 16\varkappa \times 1}\right)$$

y transformando:

$$\delta = \frac{PH^3}{8EI} \times \frac{3 + 28{,}33\varkappa + 20\varkappa^2}{\varkappa + 6\varkappa^2} = \frac{P.H^3}{\alpha.EI}$$

Los resultados de esta fórmula, comparados con los de la fórmula exacta (δ_o) se indican a continuación:

$$\delta_o = \frac{PH^3}{6EI} \times \frac{65/3 + 304{,}75\varkappa + 1129{,}75\varkappa^2 + 1467\varkappa^3 + 540\varkappa^4}{1/6 + 10\varkappa + 90\varkappa^2 + 252\varkappa^3 + 216\varkappa^4}$$

$\varkappa = \infty$	5	2	1	1/2
$\alpha = 2{,}4$	1.925	1.49	1.09	0,722
$\alpha_o = 2{,}4$	1.833	1.378	0.982	0.648
$\frac{T = T_o}{T_o} = 0$	—2,5%	—3,9%	—5%	—5,5%

Del estudio anterior, podemos deducir que el método de cálculo propuesto da resultados que pueden ser considerados como exactos para estructuras regulares con relación rigidez dintel a rigidez pilar $\varkappa > 2$ y de suficiente aproximación para $\varkappa > 0{,}5$. En este último caso, puede observarse que los valores del período que se obtienen son inferiores a los verdaderos.